Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Christian Lageman, Martin Lamprecht, Ralf Winkler

Würzburg, den 28. Juni 2006

10. Übung zur Analysis II

Sommersemester 2006

47.) **(5 Punkte)**

a.) Es sei $a \geq 0$. Die Funktionen $f, g : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ seien lokal integrierbar. Zeigen Sie: Ist $|f| \leq g$ auf $[a, \infty[$ und gilt

$$\int_a^\infty g(x)\,dx < \infty\,,$$

so existiert auch das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x)\,dx\,.$$

b.) Untersuchen Sie, ob $\int_1^\infty x^x e^{-x^2}\,dx$ existiert.

48.) **(4 Punkte)** Es sei $a \geq 0$, $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ sei stetig und $\int_a^\infty f(x)\,dx$ sei konvergent. Gilt dann

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0\,?$$

49.) **(4 Punkte)** Zeigen Sie, dass die parametrisierte Kurve $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto c(t) = \begin{cases} \left(t, t^2\cos(\frac{\pi}{t^2})\right)^T & \text{für } t \neq 0 \\ (0,0)^T & \text{sonst} \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, dass aber beispielsweise die auf $[0, 1]$ eingeschränkte Kurve **keine** endliche Länge besitzt.

Hinweis: Betrachten Sie die Parameterwerte $t = \sqrt{1/n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

50.) **(3 Punkte)** Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $0 \in G$. Die Funktionen

$$\Delta_1, \ldots, \Delta_p : G \to \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad \tilde{\Delta}_1, \ldots, \tilde{\Delta}_p : G \to \mathbb{R}$$

seien in $x = 0$ stetig mit

$$\forall_{x\in G} : \quad \sum_{k=1}^n \Delta_k(x)\,x_k = \sum_{k=1}^n \tilde{\Delta}_k(x)\,x_k\,.$$

Zeigen Sie:

$$\forall_{k=1}^p : \quad \Delta_k(0) = \tilde{\Delta}_k(0)\,.$$

51.) **(5 Punkte)** Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit in $\mathbb{R}^2$. Untersuchen Sie, für welche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ die partiellen Ableitungen existieren und geben Sie diese ggf. an. Untersuchen Sie die partiellen Ableitungen im Falle ihrer Existenz ebenfalls auf Stetigkeit.

a.) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$

b.) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy^3 - yx^3}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$.

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis spätestens **Mittwoch, den 05. Juli 2006, 11:00 Uhr**, in die richtigen Briefkästen neben der Mathe/Info-Teilbibliothek.