Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Christian Lageman, Martin Lamprecht, Ralf Winkler

Würzburg, den 21. Juni 2006

9. Übung zur Analysis II

Sommersemester 2006

41.) **(2 Punkte)** Es sei $a < b$ und die Funktionen f und g stetig auf $[a, b]$ mit $g > 0$. Ferner sei

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \;=\; 0\,.$$

Zeigen Sie, dass dann f in $]a, b[$ mindestens eine Nullstelle besitzt.

42.) **(4 Punkte)** Es sei $a < b$. Die Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei monoton steigend, die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei monoton fallend.

a.) Es sei zunächst $\int_a^b g(x)\, dx \;=\; 0$. Zeigen Sie, dass es dann ein $c \in]a, b[$ gibt mit

$$g(x) \le 0 \text{ in } [a, c[\qquad \text{und} \qquad g(x) \ge 0 \text{ in }]c, b]$$

und folgern Sie die Ungleichung $f(x)g(x) \;\le\; f(c)g(x)$ für $x \in [a, b]$.

b.) Man zeige (nun wieder für allgemeines g)

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \;\le\; \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b f(x)\, dx \right) \cdot \left(\int_a^b g(x)\, dx \right)\,.$$

Hinweis: Setzen Sie $\tilde{g} = g - \alpha$ mit einem geeigneten $\alpha \in \mathbb{R}$ und verwenden Sie a.)

43.) **(3 Punkte)** Für $x \ge 1$ sei

$$F(x) \;:=\; \int_1^x \frac{1}{t}\, dt\,.$$

Zeigen Sie **ohne** Benutzung des Logarithmus, dass für $y \ge 1$ gilt: $F(xy) \;=\; F(x) + F(y)$.

44.) **(3 Punkte)** Berechnen Sie die Länge der Kurve

$$t \in [0, 2\pi] \;\mapsto\; x(t) \;=\; (t - \sin t,\; 1 - \cos t) \;\in\; \mathbb{R}^2\,.$$

45.) **(4 Punkte)** Es sei $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ monoton fallend. Zeigen Sie, dass dann gilt ($x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$):

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n f(t)\, dt \;\text{ konvergent} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)\, dt \;\text{ konvergent}\,.$$

Kann man auf die Monotonie von f verzichten?

46.) **(6 Punkte)** Gegeben seien die Funktionen $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cap]0, 1[\\ \frac{1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap]0, 1] \text{ mit } p, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \end{cases} \qquad \text{und} \quad g(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f und g auf $[0, 1]$ R-integrierbar sind und bestimmen Sie die beiden R-Integrale. Ist auch die Komposition $g \circ f$ integrierbar auf $[0, 1]$?

Hinweis zu den Obersummen von f: Wählen Sie eine feine Zerlegung im Bereich der rationalen Zahlen mit kleinem Nenner.

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis spätestens **Mittwoch, den 28. Juni 2006, 11:00 Uhr**, in die richtigen Briefkästen neben der Mathe/Info-Teilbibliothek.