Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Christian Lageman, Martin Lamprecht, Ralf Winkler

Würzburg, den 14. Juni 2006

8. Übung zur Analysis II

Sommersemester 2006

36.) **(4 Punkte)** (Charakterisierung des Integrals als Mittelwert) Für jedes $f \in C(\mathbb{R})$ und jedes kompakte Intervall $I = [a, b]$ sei eine Zahl $J(f, I)$ erklärt, welche den Bedingungen

i.) $(b-a)\min f(I) \le J(f,I) \le (b-a)\max(f,I)$

ii.) $J(f, I_1 \cup I_2) = J(f, I_1) + J(f, I_2)$, falls die kompakten Intervalle I_1, I_2 genau einen Punkt gemeinsam haben

genügt. Man zeige, dass

$$J(f,I) = \int_I f(x)\,dx\,.$$

Hinweis: Betrachten Sie Riemannsche Ober- und Untersummen.

37.) **(4 Punkte)** Es seien $0 < a < b$. Man betrachte die Zerlegung $\{x_0, \ldots, x_n\}$ des Intervalls $[a, b]$ mit $x_k = aq^k$ $(k = 0, \ldots, n)$ und $q := \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ und berechne damit ohne Verwendung des Hauptsatzes das Riemann-Integral

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \log\frac{b}{a}\,.$$

38.) **(4 Punkte)** Zeigen Sie: Sind die Funktionen f und g über $I = [a, b]$ R-integrierbar, so ist für beliebige Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ auch die Funktion $\alpha f + \beta g$ über I R-integrierbar mit

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

39.) **(2 Punkte)** Es seien $a, b > 0$. Berechnen Sie:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{na+kb}\,.$$

40.) **(5 Punkte)** Es sei $I = [a, b]$ und $(x_k \in I)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Zeigen Sie die Integrierbarkeit der Funktion

$$f : I \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = x_k \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$.

Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Zerlegung von I hinsichtlich des Grenzwerts der Folge sowie der einzelnen Folgenglieder.

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis spätestens **Mittwoch, den 21. Juni 2006, 11:00 Uhr**, in die richtigen Briefkästen neben der Mathe/Info-Teilbibliothek.