Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Christian Lageman, Martin Lamprecht, Ralf Winkler

Würzburg, den 7. Juni 2006

7. Übung zur Analysis II

Sommersemester 2006

30.) **(2 Punkte)** Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k > \log(1+x) \quad \text{für } x > -1,\, x \neq 0\,.$$

31.) **(3 Punkte)** Zeigen Sie: Ist $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, so gilt für alle $x, y \in I$ und $\lambda \in [0,1]$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)\,.$$

32.) **(4 Punkte)** Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = (\sin x)^2\,(1-\cos x)\,.$$

Bestimmen Sie die Symmetrieeigenschaften, die Periodizität, Nullstellen, lokale Extrema, Wendepunkte sowie Konvexitäts- und Konkavitätsbereiche der Funktion f.

33.) **(3 Punkte)** Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a.) Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit $f'(0) > 0$, aber in keiner Umgebung von 0 monoton wächst.

b.) Ist $f \in C^1(\mathbb{R})$?

34.) **(3 Punkte)**

a.) Untersuchen Sie, ob die Funktion

$$f(x) = \log(1+x) + 2\sin x - x(3 - \frac{x}{2}) \qquad (x > -1)$$

an der Stelle $x_0 = 0$ ein lokales Extremum besitzt.

b.) Finden Sie eine Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{x-1} + h(x)$$

in $x_0 = 1$ einen Wendepunkt besitzt mit $f'''(1) = f^{(5)}(1) = 0$.

35.) **(4 Punkte)** Es sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt. Zeigen Sie, dass für die Schwankung von f, gegeben durch

$$|\Delta f|_I = \sup\{|f(x) - f(x')| \mid x, x' \in I\}$$

gilt:

$$|\Delta f|_I = M - m$$

mit

$$M := \sup\{f(x) \,|\, x \in I\} \quad \text{und} \quad m := \inf\{f(x) \,|\, x \in I\}\,.$$

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis spätestens **Mittwoch, den 14. Juni 2006, 11:00 Uhr**, in die richtigen Briefkästen neben der Mathe/Info-Teilbibliothek.