Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Christian Lageman, Martin Lamprecht, Ralf Winkler

Würzburg, den 24. Mai 2006

5. Übung zur Analysis II

Sommersemester 2006

21.) **(6 Punkte)**

a.) Bestimmen Sie für die Funktionen

$$\text{Arctan},\ \text{Artanh},\ \text{Arcsin},\ \text{Arsinh},$$

ihre Potenzreihenentwicklung in einer Umgebung des Nullpunkts. Wie groß ist jeweils der Konvergenzradius?

Hinweis: Man betrachte die Ableitungen der Funktionen.

b.) Man prüfe, ob die Reihen aus a.) auch auf dem Rand ihres Konvergenzintervalls konvergieren.

c.) Zeigen Sie

$$\pi \;=\; 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} \;=\; 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}\frac{1}{2k+1}\,.$$

22.) **(6 Punkte)** Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Intgrale

$$\text{a.)} \int x^3 \sin x\,dx,\quad \text{b.)} \int \frac{e^x+1}{e^x+e^{-x}}\,dx,\quad \text{c.)} \int \frac{x^5+x^4+2x^2+5}{(x+1)^2(x^2+x+1)}\,dx\,.$$

23.) **(4 Punkte)**

a.) Die Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ besitze eine Stammfunktion. Ferner sei I ein Intervall und die Funktionen $g,h: I\to[a,b]$ differenzierbar. Man zeige, dass

$$x\mapsto S(x) \;=\; \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$$

auf I differenzierbar ist mit

$$S'(x) \;=\; f(h(x))h'(x) \;-\; f(g(x))g'(x)\,.$$

b.) Man bestimme mit Hilfe von a.):

$$\text{i)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^6}\int_{-2x^2}^{2x^2}\log(1+t^2)\,dt \qquad\qquad \text{ii)}\ \lim_{x\to 0} x\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t^3}\,dt\,.$$

24.) **(2 Punkte)** Gegeben sei das Polynom

$$p(x) \;=\; x^4-2x^3+5x-1\,.$$

Berechnen Sie a_0,a_1,a_2,a_3,a_4, so dass für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt:

$$p(x) \;=\; a_0 \;+\; a_1(x-1) \;+\ldots+\; a_4(x-1)^4\,.$$

25.) **(4 Punkte)** Die Funktionen $f,g: I\to\mathbb{R}$ seien in $x_0\in I$ p mal differenzierbar. Es sei $g(x_0)=0$ und

$$f(x) \;=\; q(x)+(x-x_0)^p g(x)$$

mit einem Polynom q vom Grade $\leq p$. Dann ist q das p.te Taylorpolynom von f um die Stelle x_0, also $q = T_p|_{x_0}$.

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis spätestens **Mittwoch, den 31. Mai 2006, 11:00 Uhr**, in die richtigen Briefkästen neben der Mathe/Info-Teilbibliothek.