Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik
Prof. Dr. H. Pabel
Christian Lageman, Martin Lamprecht, Ralf Winkler

Würzburg, den 10. Mai 2006

3. Übung zur Analysis II

Sommersemester 2006

11.) **(4 Punkte)** Vorbemerkung: Für $z \in \mathbb{C}$ sind die Funktionen

$$z \mapsto \cos z\,, \quad x \mapsto \sin z \quad \text{und} \quad z \mapsto \exp(z)$$

dadurch definiert, dass man ihre jeweilige reelle Potenzreihenentwicklung auf $\mathbb{C}$ fortsetzt. Darauf aufbauend sind auch $z \mapsto \sinh z$, $z \mapsto \cosh z$, $z \mapsto \tanh z$ und $z \mapsto \operatorname{cotanh} z$ als komplexe Erweiterungen der entsprechenden reellen Ausdrücke erklärt. Insbesondere ist für $z \in \mathbb{C}$ die Funktion $z \mapsto \tanh z$ gegeben als komplexe Erweiterung der Potenzreihe aus Aufgabe 7.

Zeigen Sie für $z \in \mathbb{C}$ die Beziehungen

$$\cos z \;=\; \cosh(iz) \qquad \text{sowie} \qquad \sin z \;=\; \frac{1}{i}\sinh(iz)$$

und leiten Sie daraus die Potenzreihenentwicklung $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ der Tangensfunktion ab. Bestimmen Sie die Koeffizienten a_0 bis a_6.

12.) a.) **(2 Punkte)** Zeigen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(i) \quad |\sin x \,-\, \sin y| \;\leq\; |x-y| \qquad (ii) \quad |\sinh x \,-\, \sinh y| \;\geq\; |x-y|\,.$$

b.) **(2 Punkte)** Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $|g'(x)| \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) \;=\; x \,+\, \epsilon \cdot g(x)$$

injektiv ist.

13.) a.) **(3 Punkte)** Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Ihr Graph schneide den Graphen einer linearen Funktion $x \mapsto cx + d\,(c, d \in \mathbb{R})$ in drei Punkten. Zeigen Sie, dass f'' in $]a,b[$ mindestens eine Nullstelle besitzt.

b.) **(1 Punkt)** Formulieren Sie eine mögliche Verallgemeinerung dieser Aufgabe (sie brauchen diese nicht zu beweisen).

14.) **(4 Punkte)** Beweisen Sie: Eine auf dem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ stetige und auf $]a,b[$ differenzierbare Funktion f ist genau dann streng monoton steigend, wenn

$$\forall_{x \in]a,b[}\; f'(x) \geq 0 \quad \text{und} \quad f'(x) \;=\; 0 \text{ in keinem nichttrivialen Teilintervall } J \subset]a,b[\,.$$

15.) **(4 Punkte)** Berechnen Sie:

$$\text{a.)} \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x+x^2) - x}{x^2} \qquad \text{b.)} \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{e^x}{\sin x}\right) \qquad \text{c.)} \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan(2x)}\,.$$

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis spätestens **Mittwoch, den 17. Mai 2006,** $\boxed{\textbf{11:00 Uhr}}$, in die richtigen Briefkästen neben der Mathe/Info-Teilbibliothek.