Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Christian Lageman, Martin Lamprecht, Ralf Winkler

Würzburg, den 26. April 2006

1. Übung zur Analysis II

Sommersemester 2006

1.) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

a.) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{k!}\, z^k$ b.) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (1+3\,i^k)^{-k}\, z^k$ c.) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \log(1+k)\, z^k$

2.) Berechnen Sie:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} + x\sin x - 1}{\cos x + \frac{1}{2}x^2 - 1}\,.$$

3.) Bestimmen Sie für $k = 1, \ldots, 5$ die Koeffizienten a_k in der Potenzreihenentwicklung $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ der Funktion

$$x \mapsto \sin(xe^x)\,.$$

4.) Geben Sie an, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, e^{-kx^2}$$

konvergiert und berechnen Sie den Reihenwert.

Hinweis: Betrachten Sie als Vorbereitung das Cauchy-Produkt zweier konvergenter geometrischer Reihen.

5.) Zeigen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}, -1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1-x}{1-x-2x^2}$ lässt sich für $|x| < \frac{1}{2}$ in eine Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ entwickeln mit Koeffizienten

$$a_k = \frac{1}{3}\,2^k + \frac{2}{3}(-1)^k\,.$$

6.) Es sei $D := \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$. Zeigen Sie: Die auf D defnierte **Riemannsche Zetafunktion**

$$s \mapsto \zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

ist stetig auf D.

Hinweis: Verwenden Sie die Stetigkeit der allgemeinen Potenz zu endlich vielen Basen $\frac{1}{1^s}, \ldots, \frac{1}{N^s}$ und behandeln Sie den Reihenrest $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ in einer Umgebung eines $s_0 \in D$ gesondert.

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis spätestens **Mittwoch, den 3. Mai 2006, 13:00 Uhr**, in die richtigen Briefkästen neben der Mathe/Info-Teilbibliothek.