Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Christian Lageman, Martin Lamprecht, Ralf Winkler

Würzburg, den 27. Juni 2006

8. Übung zur Analysis II

Sommersemester 2006
Lösungshinweise

38.) Es sei $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und damit mit $I_k := [x_{k-1}, x_k]$

$$
\begin{aligned}
& V_{\alpha f + \beta g}(Z) \;=\; \sum_{k=1}^{n-1}(x_k - x_{k-1})(\sup_{I_k}(\alpha f + \beta g) - \inf_{I_k}(\alpha f + \beta g)) \\
\le\; & \sum_{k=1}^{n-1}(x_k - x_{k-1})(\sup_{I_k}(\alpha f) \;+\; \sup_{I_k}(\beta g) \;-\; \inf_{I_k}(\alpha f) \;-\; \inf_{I_k}(\beta g)) \\
=\; & \begin{cases}
\sum_{k=1}^{n-1}(x_k - x_{k-1})\alpha\,(\sup\limits_{I_k} f - \inf\limits_{I_k} f) \;+\; \sum_{k=1}^{n-1}(x_k - x_{k-1})\beta\,(\sup\limits_{I_k} g - \inf\limits_{I_k} g) & (\alpha > 0,\ \beta > 0) \\
\sum_{k=1}^{n-1}(x_k - x_{k-1})\alpha\,(\sup\limits_{I_k} f - \inf\limits_{I_k} f) \;+\; \sum_{k=1}^{n-1}(x_k - x_{k-1})\beta\,(\inf\limits_{I_k} g - \sup\limits_{I_k} g) & (\alpha > 0,\ \beta < 0) \\
\sum_{k=1}^{n-1}(x_k - x_{k-1})\alpha\,(\inf\limits_{I_k} f - \sup\limits_{I_k} f) \;+\; \sum_{k=1}^{n-1}(x_k - x_{k-1})\beta\,(\sup\limits_{I_k} g - \inf\limits_{I_k} g) & (\alpha < 0,\ \beta > 0) \\
\sum_{k=1}^{n-1}(x_k - x_{k-1})\alpha\,(\inf\limits_{I_k} f - \sup\limits_{I_k} f) \;+\; \sum_{k=1}^{n-1}(x_k - x_{k-1})\beta\,(\inf\limits_{I_k} g - \sup\limits_{I_k} g) & (\alpha < 0,\ \beta < 0)
\end{cases} \\
& \qquad = \;\pm\alpha V_f(Z) \;\pm\; \beta V_g(Z) \;<\; \epsilon
\end{aligned}
$$

zu gegebenem $\epsilon > 0$ bei Wahl einer geeigneten Zerlegung Z, denn f und g sind integrierbar. Daher ist $\alpha f \;+\; \beta g$ integrierbar auf I. Für jede Folge Z_n von Zerlegungen mit $\|Z_n\| \to 0$ und jede Folge von Zwischenpunktvektoren $\overline{x}_n$ gilt nun nach Satz 4.5.3

$$
\begin{aligned}
& \int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx \;=\; \lim_{n\to\infty} R_{\alpha f + \beta g}(Z_n, \overline{x}_n) \\
=\; & \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} R_f(Z_n, \overline{x}_n) \;+\; \beta \cdot \lim_{n\to\infty} R_g(Z_n, \overline{x}_n) \;=\; \alpha \int_I f(x)\, dx \;+\; \beta \int_I g(x)\, dx\,.
\end{aligned}
$$

40.) Für jede Zerlegung $Z = \{y_0, \ldots, y_n\}$ von I gilt

$$
\underline{R}_f(Z) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1}(y_{i+1} - y_i) \inf_{y\in[y_i, y_{i+1}]} \;=\; 0\,,
$$

denn in jedem Intervall $[y_i, y_{i+1}]$ ($i = 0, \ldots, n-1$) gibt es Stellen, die keinem Folgenglied entsprechen. Damit ist auch

$$
\sup_{Z \text{ Zerl.}} \underline{R}_f(Z) \;=\; 0\,.
$$

Es sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben. Der Grenzwert der Folge $(x_k \in I)_{k\in\mathbb{N}}$ sei mit g bezeichnet. Dann liegen in

$$
I \backslash [g - \epsilon, g + \epsilon]
$$

endlich viele, etwa m Folgenglieder. Wir ordnen diese nach zunehmender Größe und erklären weiter für $i = 1, \ldots, m$ die Zahlen $y_i \in [a, b]$ durch

$$
[y_{2i-1},\, y_{2i}] \;:=\; [z_i - d,\, z_i + d] \cap [a, b] \cap I \backslash [g\epsilon, g + \epsilon] \qquad \text{mit } d \;:=\; \frac{\epsilon}{m}\,.
$$

Indem wir d gegebenenfalls noch verkleinern, erreichen wir, dass sich die Intervalle $[y_{2i-1},\, y_{2i}]$ nicht überschneiden. Zusammen mit den Intervallgrenzen a und b sowie den Grenzen $g \pm \epsilon$ ist dann durch die y_i eine Zerlegung von $[a,b]$ definiert. Für die dazugehörige Riemannsche Obersumme gilt dann

$$\overline{R}(f,Z) \,\le\, m \cdot \frac{\epsilon}{m} \,+\, (g+\epsilon-(g-\epsilon)) \,=\, 3\epsilon\,.$$

Da ϵ beliebig war, folgern wir zusammen mit unseren Anfangsüberlegungen

$$\inf_{Z \text{ Zerl.}} \overline{R}_f(Z) \,=\, 0 \,=\, \sup_{Z \text{ Zerl.}} \underline{R}_f(Z)\,,$$

d.h. f ist integrierbar auf I mit $\int\limits_I f(x)\,dx \,=\, 0$.