Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut fr Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
Christian Lageman, Martin Lamprecht, Ralf Winkler

Würzburg, den 12. Juni 2006

6. Übung zur Analysis II

Sommersemester 2006
Lösungshinweise

27.) Es sei vorausgeschickt, dass $\lim\limits_{y\to\infty} e^{-y}y^k = 0$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$, was beispielsweise mit dem Satz von de l'Hospital leicht zu zeigen ist.

Für $x > 0$ und $x < 0$ ist f unendlich oft diff'bar. Für $n \in \mathbb{N}_0$ zeigen wir induktiv die angegebene Darstellung von $f^{(n)}$ für $x > 0$ sowie $f \in C^{n+1}(\mathbb{R})$ mit $f^{(n+1)}(0) = 0$. Für $n = 0$ ist die angegebene Formel mit $P_0 \equiv 1$ richtig. Es ist ferner

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x} & \text{falls } x > 0 \end{cases} = 0\,,$$

denn $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{y\to\infty} e^{-y}y = 0$ nach dem obigen Kommentar. Also existiert f' auf ganz $\mathbb{R}$ mit $f'(0) = 0$.
Sei die behauptete Darstellung für ein $n \in \mathbb{N}_0$ sowie die Existenz von $f^{(n+1)}$ auf ganz $\mathbb{R}$ mit $f^{(n+1)}(0) = 0$ verifiziert. Dann ist für $x > 0$:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &\overset{(IA)}{=} P_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}} \tilde{P}_{2n-1}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^2} P_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^3} \tilde{P}_{2n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = e^{-\frac{1}{x}} P_{2n+2}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

mit Polynomen $\tilde{P}_{2n-1}$ und P_{2n+2} vom Grad $\leq 2n-1$ bzw. $\leq 2n+2$. Ferner gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^{(n+1)}(x) - f^{(n+1)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ P_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \end{cases} = 0\,,$$

denn $\lim\limits_{x\to 0^+} P_{2n}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to\infty} P_{2n}(y)e^{-y}$ nach dem obigen Kommentar. Also existiert $f^{(n+2)}$ auf ganz $\mathbb{R}$ mit $f^{(n+2)}(0) = 0$. Damit ist die Taylorreihe von f um $x_0 = 0$ gegeben durch

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \equiv 0\,,$$

also $T = 0$, was in keiner Umgebung der Null der Funktion f entspricht. Daher ist f nicht reell analytisch.

28.) Wir zeigen zunächst den Hinweis durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 0$ ist die behauptete Form trivialerweise richtig. Sei die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$ gezeigt. Dann ist

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(t) &= \frac{(1+t^2)^{n+1}\tilde{P}_{n-1}(t) + P_n(t)(n+1)(1+t^2)^n}{(1+t^2)^{2n+2}} = \frac{(1+t^2)\tilde{P}_{n-1}(t) + P_n(t)\cdot(n+1)}{(1+t^2)^{n+2}} \\ &= \frac{P_{n+1}(t)}{(1+t^2)^{n+1}} \end{aligned}$$

mit einem Polynom $\tilde{P}_{n-1}$ vom Grad $\leq\ n-1$ und einem Polynom P_{n+1} vom Grad $\leq\ n+1$. Insbesondere ist $g^{(n)}$ stetig auf $\mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \frac{P_n(t)}{(1+t^2)^n} = 0$, woraus insgesamt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Beschränktheit von $g^{(n)}$ folgt, etwa $g^{(n)} \leq M_n$. Ferner ist

$$g(t) \;=\; \frac{1}{1-(-t^2)} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}$$

und somit wegen $\frac{d^n}{dt^n}\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \;=\; n!a_n$ (für jede Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius)

$$g^n(0) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} n! & \text{falls } n \text{ gerade}\,. \end{cases}$$

Es sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Die Funktion f ist n Mal diff'bar, wenn die formal n Mal differenzierte Reihe gleichmäßig konvergiert. Es gilt dabei für $k \in \mathbb{N}_0$:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{k!(1+4^k x^2)}\right] \;=\; \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{g(2^k x)}{k!}\right] \;=\; \frac{1}{k!} g^{(n)}(2^k x)\cdot 2^{kn}\,.$$

Für einen K.ten Reihenrest der formal n Mal differenzierten Reihe gilt für gegebenes $\epsilon > 0$:

$$\sum_{k=K}^{\infty} \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{k!}\frac{1}{1+4^k x^2}\right] \;=\; \sum_{k=K}^{\infty} \frac{2^{kn}}{k!} g^{(n)}(2^k x) \;\leq\; M_n \sum_{k=K}^{\infty} \frac{(2^n)^k}{k!} \;<\; \epsilon\,,$$

für großes $K \in \mathbb{N}$, was sich beispielsweise aus dem Quotientenkriterium ergibt. Damit ist f n Mal diff'bar und, da n beliebig war, auch $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Wir berechnen $f^{(n)}(0)$ zu

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) \;&=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{1}{k!}\frac{1}{1+4^k x^2}\right]\Bigg|_{x=0} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} g^{(n)}(0) 2^{kn} \\ &=\; \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2^n)^k}{k!} \;=\; (-1)^{\frac{n}{2}} n! e^{2^n} & \text{falls } n \text{ gerade}\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Die zugehörige Taylor-Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(0) x^{2n} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{4^n} x^{2n}$$

divergiert für alle $x \neq 0$, denn

$$\frac{e^{4^{n+1}} x^{2n+2}}{e^{4^n} x^{2n}} \;=\; x^2 \cdot \frac{e^{4^{n+1}}}{e^{4^n}} \;=\; x^2\, e^{4^{n+1}-4^n} \;=\; x^2 \cdot e^{3\cdot 4^n} \;>\; 1 \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N}.$$