Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
PD Dr. Oliver Roth, Dr. Daniela Kraus, Ralf Winkler

Würzburg, den 18. Januar 2006

11. Übung zur Analysis I

Wintersemester 2005/06

41.) a.) Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei stetig und es gelte $f(0) = f(1)$. Man zeige: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $x \in [0,1]$ mit

$$f(x) = f(x + \frac{1}{n}).$$

b.) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to I$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt $\xi \in I$ besitzt, also eine Stelle $\xi \in I$ mit $f(\xi) = \xi$. Kann man die Voraussetzung der Kompaktheit von I abschwächen?

42.) Berechnen Sie für die gegebenen Funktionenfolgen die Grenzfunktion $x \mapsto \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ und untersuchen Sie auf gleichmäßige Konvergenz:

a.) $f_k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = \sqrt[k]{x}$,

b.) $f_k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = 1 + \min\{k, \frac{1}{x}\}$,

c.) $f_k : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = x\,(x-2)\,(1-x)^k$.

43.) Es sei $D \subset \mathbb{K}$. Die Funktionenfolgen $(f_k : D \to \mathbb{K})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(g_k : D \to \mathbb{K})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren gleichmäßig auf einer Menge D. Zeigen Sie:

a.) Auch die Folge $(f_k + g_k : D \to \mathbb{K})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf D.

b.) Sind die Folgen $(f_k : D \to \mathbb{K})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(g_k : D \to \mathbb{K})_{k\in\mathbb{N}}$ zusätzlich beschränkt, so konvergiert auch $(f_k \cdot g_k : D \to \mathbb{K})_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf D.

44.) a.) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{kx}$$

auf punktweise, absolute und gleichmäßige Konvergenz in $]0,1]$.

b.) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$$

auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig und absolut konvergiert, dass die Reihe der Absolutbeträge

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$$

jedoch nicht gleichmäßig konvergiert. Bestimmen Sie jeweils den Reihenwert.

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis spätestens **Mittwoch, den 25. Januar 2006, 12:00 Uhr**, in die richtigen Briefkästen neben der Mathe/Info-Teilbibliothek.

Die **Klausur**, zu der außer Vorlesungs- und Übungsmitschriften keine weiteren Hilfsmittel zugelassen sind, findet am 07. Februar 2006 von 16:00 Uhr bis 18:00 Uhr statt. Weitere Informationen, u.a. bezüglich Zulassung und Klausurort, folgen ab Dienstag, den 31. Januar 2006.