



Würzburg, den 11. Januar 2006

10. Übung zur Analysis I

Wintersemester 2005/06

37.) a.) Bestimmen Sie, für welche $z \in \mathbb{C}$ die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k} ?$$

konvergiert und berechnen Sie im Falle der Konvergenz den Reihenwert.

b.) Zeigen Sie: Die Reihe

$$e(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie daraufhin für $x \in \mathbb{R}$ speziell eine Reihendarstellung des Real- und des Imaginärteils von $e(ix)$. Warum sind auch diese Reihen konvergent?

38.) a.) Es sei D eine nichtleere Teilmenge von \mathbb{R} und $\text{Hp}(D)$ die Menge aller Häufungspunkte von D . Geben Sie eine nichtleere Teilmenge $M \subset \text{Hp}(D)$ an, so dass gilt:

Es ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann stetig in $x_0 \in M$, wenn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

b.) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit:

i.) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4,$

ii.) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \inf_{a \in A} |x - a|, A \subset \mathbb{R}^n, A \neq \emptyset.$

39.) a.) Für $k \in \mathbb{N}$ seien die Funktionen $f_k : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 - k^2 x^2 & -\frac{1}{k} \leq x \leq \frac{1}{k} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie für $x_0 \in [-1, 1]$:

i.) $\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x)$ ii.) $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x).$

b.) Berechnen Sie die Grenzwerte

i.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$ ii.) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2 - x} - \frac{12}{8 - x^3} \right).$

40.) Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Formalisieren Sie in der Art eines $\epsilon - \delta$ -Kriteriums die Sachverhalte

a.) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ b.) $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty.$

Welche Bedingungen sind jeweils an den Definitionsbereich D von f zu stellen?