Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. H. Pabel
PD Dr. Oliver Roth, Dr. Daniela Kraus, Ralf Winkler

Würzburg, den 21. Dezember 2005

9. Übung zur Analysis I

Wintersemester 2005/06

33.) a.) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Reihe

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6^2} + - \ldots$$

b.) Bestimmen Sie die Summe

$$\frac{1}{1 \cdot 4 \cdot 7} + \frac{1}{4 \cdot 7 \cdot 10} + \frac{1}{7 \cdot 10 \cdot 13} + \ldots$$

Hinweis: Partialbruchzerlegung und Teleskopsummen.

34.) a.) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$a.)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + k \cdot 2^k}{3^k} \qquad b.)\ \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{-k} \qquad c.)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ik)^5 - 4k^2}{k^6 + k}.$$

b.) Zeigen Sie: Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^k \cdot (k!)^2} z^k$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \frac{1}{2}$.

c.) Geben Sie eine konvergente Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ mit positiven Folgengliedern a_k an, so dass $\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$.

35.) a.) Zeigen Sie (unter Benutzung der Reihendarstellung von e): Es ist $n! \cdot e \notin \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b.) Folgern Sie aus a.), dass e irrational ist.

36.) a.) Zeigen Sie für $p \in \mathbb{N}$: Die Funktion $x \mapsto \sqrt[p]{x}$ ist stetig auf $[0, \infty[$.

Hinweis: Finden Sie zunächst zu gegebenen $a, b \in \mathbb{R}^+$ den Faktor $R(a,b)$ mit $(a^p - b^p) = (a - b) \cdot R(a,b)$.

b.) In welchen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2}{x-y} & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{für } x = y \end{cases}$$

stetig?

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis spätestens **Mittwoch, den 11. Januar 2006, 12:00 Uhr**, in die richtigen Briefkästen neben der Mathe/Info-Teilbibliothek.

Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest, erholsame Weihnachtsferien sowie einen guten Start in ein gesundes neues Jahr 2006!