Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. H. Pabel
PD Dr. Oliver Roth, Dr. Daniela Kraus, Ralf Winkler

Würzburg, den 14. Dezember 2005

8. Übung zur Analysis I

Wintersemester 2005/06

29.) Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt *folgenkompakt*, wenn jede Folge in A eine **in A** konvergente Teilfolge besitzt.

a.) Es sei $I \ :=]0,1[\subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie ausschließlich unter Verwendung der Definitionen von Kompaktheit und Folgenkompaktheit: I ist nicht kompakt und nicht folgenkompakt.

b.) Zeigen Sie: Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann folgenkompakt, wenn sie kompakt ist.
Hinweis: Benutzen sie die Charakterisierung der Kompaktheit nach Heine-Borel.

30.) a.) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_k \in \mathbb{C})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k := i^k + \frac{1}{2^k}$.

b.) Konstruieren Sie eine Folge $(a_k \in \mathbb{Q})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass jedes $x \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt dieser Folge ist.

c.) Es seien $(a_k \in \mathbb{R})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k \in \mathbb{R})_{k\in\mathbb{N}}$ zwei beschränkte Folgen. Zeigen Sie:

$$\limsup(a_k + b_k) \ \leq \ \limsup a_k \ + \ \limsup b_k\,.$$

31.) a.) Es sei $(x_k \in \mathbb{R})_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge mit $\forall k \in \mathbb{N} \quad x_k > 0$. Zeigen Sie den **Verdichtungssatz**: Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergiert genau dann, wenn die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k\, x_{2^k}$ konvergiert.

Hinweis: Vergleichen Sie die Partialsummen der beiden Reihen.

b.) Bestimmen Sie mit Hilfe von a.) alle $p \in \mathbb{Q}^+$, für welche die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ konvergiert.

32.) a.) Es sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ eine alternierende Reihe mit monoton fallender Nullfolge $(|x_k|)_{k\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie: Zu jedem $l \in \mathbb{N}$ gibt es ein θ_l mit $0 \leq \theta_l \leq 1$, so dass für den **Reihenrest** $r_l := \sum\limits_{k=l+1}^{\infty} x_k$ gilt:

$$r_l \ = \ \theta_l \cdot x_{l+1}\,.$$

b.) Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^{k-1}}{(-k)^k}$. Finden Sie zu gegebenem $\epsilon > 0$ eine Zahl $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^{k-1}}{(-k)^k} - \sum_{k=1}^{N(\epsilon)} \frac{(k+1)^{k-1}}{(-k)^k} \right| \ < \ \epsilon\,.$$

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis spätestens **Mittwoch, den 21. Dezember, 12:00 Uhr**, in die richtigen Briefkästen neben der Mathe/Info-Teilbibliothek.