Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. H. Pabel
PD Dr. Oliver Roth, Dr. Daniela Kraus, Ralf Winkler

Würzburg, den 23. November 2005

5. Übung zur Analysis I

Wintersemester 2005/06

17.) a.) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar.

$$a_1.)\ (2+i)^3 \qquad\qquad a_2.)\ \frac{(2+i)(3+2i)}{(1-i)}\,.$$

b.) Zeigen Sie für $z, w \in \mathbb{C}$ die folgenden Rechengesetze:

$b_1.)$ $|z \cdot w| \;=\; |z| \cdot |w|$ $\qquad$ $b_2.)$ $\overline{z \cdot w} \;=\; \overline{z} \cdot \overline{w}$ $\qquad$ $b_3.)$ $\overline{z + w} \;=\; \overline{z} + \overline{w}\,.$

c.) Es seien $a, z \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$. Beweisen Sie:

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z| < 1\,.$$

18.) Zeigen Sie: Es gibt auf $\mathbb{C}$ keine totale Ordnung „$\leq$“, welche mit den Operationen $+$ und $\cdot$ verträglich ist, für welche also gilt

- $a \leq b \;\Rightarrow\; a + c \;\leq\; b + c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{C}$ und
- $a \leq b \;\Rightarrow\; ac \;\leq\; bc$ für alle $a, b, c \in \mathbb{C}, c \geq 0\,.$

Hinweis: Verwenden Sie die Beziehung $i^2 = -1$.

19.) a.) Es sei X ein normierter Raum. Zeigen Sie die *umgekehrte Dreiecksungleichung*:

$$\forall_{x,y \in X} \quad |x - y| \;\geq\; \big|\,|x| - |y|\,\big|\,.$$

b.) Zeigen Sie, dass es sich bei der Abbildung $|\cdot|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\forall_{x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n} \quad |x|_1 \;:=\; |x_1| + \ldots + |x_n|$$

um eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ handelt und skizzieren Sie die Menge

$$\tilde{B}_1(0) \;:=\; \{x \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad |x|_1 \leq 1\}\,.$$

20.) Eine nichtleere Menge X heißt *metrischer Raum*, wenn auf ihr eine *Metrik* (Abstandsfunktion) $d : X \times X \to \mathbb{R}$ gegeben ist mit den Eigenschaften

(M1)	Positive Definitheit:	$\forall_{x,y \in X}$	$d(x,y) \geq 0 \wedge (d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$
(M2)	Symmetrie:	$\forall_{x,y \in X}$	$d(y,x) = d(x,y)$
(M3)	Dreiecksungleichung:	$\forall_{x,y,z \in X}$	$d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$.

a.) Es sei $(X, |\cdot|)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass dann X mit $\forall_{x,y \in X}\ d(x,y) := |y - x|$ auch ein metrischer Raum ist.

b.) (**Französische-Eisenbahn-Metrik**) Sei $X = \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass es sich bei der Abbildung

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{wenn } x = \lambda y \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R}\,, \\ |x| + |y| & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

um eine Metrik auf dem $\mathbb{R}^2$ handelt.

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis spätestens **Mittwoch, den 30. November, 12:00 Uhr**, in die richtigen Briefkästen neben der Mathe/Info-Teilbibliothek.