Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. H. Pabel
PD Dr. Oliver Roth, Dr. Daniela Kraus, Ralf Winkler

Würzburg, den 09. November 2005

3. Übung zur Analysis I

Wintersemester 2005/06

9.) Es seien X und Y nichtleere Mengen. Ferner sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

a.) $f : X \to Y$ ist genau dann surjektiv, wenn für alle $B \subset Y$ gilt: $f[f^{-}[B]] = B$.

b.) $f : X \to Y$ ist genau dann injektiv, wenn für alle $A \subset X$ gilt: $f^{-}[f[A]] = A$.

10.) Es sei M eine nichtleere Menge. Beweisen oder widerlegen Sie:

a.) Es sei R eine Ordnungsrelation in M. Ist M bzgl. R wohlgeordnet, so ist M auch total geordnet bzgl. R.

b.) Jede symmetrische und transitive Relation R in M ist auch reflexiv.

c.) Es gibt genau eine Relation R in M, welche sowohl Abbildung (von M nach M) als auch Ordnungsrelation ist.

11.) a.) Zeigen Sie: Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist abzählbar.

b.) Zeigen Sie: Die Menge aller endlichen Teilmengen einer abzählbaren Menge ist abzählbar.

12.) a.) Zeigen Sie das folgende *Rekursionsprinzip*: Für eine Teilmenge $T \subset \mathbb{N}$ gelte:

$$1, 2 \in T \ \wedge \ (\forall_n \ n, n+1 \in T \ \Rightarrow \ n+2 \in T)\,.$$

Dann ist $T = \mathbb{N}$.

Hinweis: Verwenden Sie das Induktionsprinzip für eine geeignete Teilmenge $T' \subset \mathbb{N}$.

b.) Ein Fruchtfliegenforscher entwickelte folgendes Populationsmodell: Es sei F_n die Anzahl der Fruchtfliegenpaare in der Woche n. Ein neugeborenes Fruchtfliegenpaar setzt dabei in der übernächsten Woche zwei neue Paare in die Welt. Setzen wir die Unsterblichkeit der Fruchtfliegen voraus, genügt somit die Größe F_n der Rekursionsformel

$$\forall_{n \geq 2} \quad F_{n+1} \, = \, F_n \, + \, 2\, F_{n-1}\,.$$

Zeigen Sie ausgehend von den Anfangswerten $F_1 = 1$ und $F_2 = 1$ die explizite Formel

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad F_n \, = \, -\frac{1}{3} \cdot (-1)^n \, + \, \frac{1}{3} \cdot 2^n\,.$$

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis spätestens **Mittwoch, den 16. November, 12:00 Uhr**, in die richtigen Briefkästen neben der Mathe/Info-Teilbibliothek.