



Würzburg, den 02. November 2005

2. Übung zur Analysis I

Wintersemester 2005/06

5.) Gegeben sind drei nichtleere Mengen A, B und C sowie zwei Funktionen $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$. Beweisen Sie:

- Sind f und g surjektiv, so ist auch die Komposition $g \circ f$ surjektiv.
- Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.
- Sind f und g bijektiv, so ist auch $g \circ f$ bijektiv und es gilt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- Die Umkehrungen der Aussagen in a.), b.) und c.) sind falsch.

6.) a.) Es sei $M = \mathbb{N}^2$ und R eine Relation in M , definiert durch

$$\forall_{(a,b),(c,d) \in \mathbb{N}^2} ((a,b), (c,d)) \in R \quad :\Leftrightarrow \quad a - c = b^2 - d^2.$$

Zeigen Sie, dass es sich bei R um eine Äquivalenzrelation in M handelt.

b.) Es sei R sowohl eine Äquivalenz- als auch eine Ordnungsrelation in einer Menge M . Zeigen Sie, dass dann R die Gleichheitsrelation in M ist, d.h.

$$\forall_{x,y \in M} (x,y) \in R \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$$

7.) Es seien X und Y Mengen mit nichtleeren Teilmengen $A, B \subset X$ sowie $C, D \subset Y$. Ferner sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie **mindestens zwei** der folgenden vier Rechengesetze:

- $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$,
- $f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B]$,
- $f^{-1}[C \cup D] = f^{-1}[C] \cup f^{-1}[D]$,
- $f^{-1}[C \cap D] = f^{-1}[C] \cap f^{-1}[D]$.

Zeigen Sie, dass in b.) im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

8.) a.) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

b.) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion: Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n^{m+1} + (m+1)n^m \leq (n+1)^{m+1}.$$

Abgabe der schriftlichen Lösungen bis spätestens **Mittwoch, den 09. November, 12:00 Uhr**, in die richtigen Briefkästen neben der Mathe/Info-Teilbibliothek.

Hinweis: Ab sofort sind die Bearbeitungen immer bis zum darauffolgenden **Mittwoch, 12:00 Uhr**, abzugeben. Im Ausgleich dafür ist eine Abgabe in Dreiergruppen zulässig. Nicht erlaubt ist der Einsatz von Fotokopien jeglicher Art.