Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. H. Pabel
PD Dr. Oliver Roth, Dr. Daniela Kraus, Ralf Winkler

Würzburg, den 19. Januar 2006

9. Übung zur Analysis I

Wintersemester 2005/06
Lösungshinweise

36.) a.) Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $p \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned}(a-b)\cdot\left(\sum_{k=0}^{p-1} a^k \cdot b^{p-1-k}\right) &= \sum_{k=0}^{p-1} a^{k+1}\, b^{p-1-k} - \sum_{k=0}^{p-1} a^k\, b^{p-k} \\ &= a^p + \sum_{k=0}^{p-2} a^{k+1}\, b^{p-1-k} - b^p - \sum_{k=1}^{p-1} a^k\, b^{p-k} \\ &= a^p + \sum_{k=1}^{p-1} a^k\, b^{p-k} - b^p - \sum_{k=1}^{p-1} a^k\, b^{p-k} = a^p - b^p\,.\end{aligned}$$

Indem wir nach $(a-b)$ auflösen und für $x, x_k \in \mathbb{R}^+$ dabei setzen: $a := \sqrt[p]{x}$, $b := \sqrt[p]{x_k}$ erhalten wir

$$\left|\sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{x_k}\right| = \frac{|x - x_k|}{\sum\limits_{k=0}^{p-1} (\sqrt[p]{x})^{p-1-k}\, (\sqrt[p]{x_k})^k}\,.$$

Es sei $(x_k \in \mathbb{R})_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $x_k \to x$. Für großes $k \in \mathbb{N}$ gilt dann $x_k \geq \frac{1}{2}x$, also auch $\sqrt[p]{x_k} \geq \sqrt[p]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[p]{x} > 0$, womit für obigen Nenner gilt:

$$\sum_{k=0}^{p-1} (\sqrt[p]{x})^{p-1-k}\, (\sqrt[p]{x_k})^k \geq \left(\sqrt[p]{\frac{1}{2}}\right)^{p+1} \cdot \sum_{k=0}^{p-1} (\sqrt[p]{x})^{p-1-k}\, (\sqrt[p]{x})^k \geq m(x) > 0\,.$$

Also ist für $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\left|\sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{x_k}\right| \leq \frac{1}{m(x)} \cdot |x - x_k|\,,$$

woraus mit $x_k \to x$ auch $\sqrt[p]{x_k} \to \sqrt[p]{x}$ folgt.
Es bleibt noch die Stetigkeit im Nullpunkt zu zeigen: Ausgehend von gegebenem $\epsilon > 0$ wählen wir $\delta := \epsilon^p$. Dann ist für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$ mit $|x - 0| < \delta$ bzw. $x < \epsilon^p$:

$$\left|\sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{0}\right| = \sqrt[p]{x} < \sqrt[p]{\epsilon^p} = \epsilon\,.$$

b.) In allen Punkten $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq y$ ist f stetig. Begründung: Zu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $x_0 \neq y_0$ ist auch $x \neq y$ in einer Umgebung $U_\epsilon(x_0, y_0)$, so dass in $U_\epsilon(x_0, y_0)$ die Funktion f gegeben ist durch $(x, y) \mapsto \frac{x^2}{x-y}$. Als rationale Funktion mit einem nullstellenfreien Nenner ist $f|_{U_\epsilon(x_0,y_0)}$ in $U_\epsilon(x_0, y_0)$ stetig, also ist f in (x_0, y_0) stetig.

Für einen Punkt (x_0, y_0) mit $0 \neq x_0 = y_0$ betrachten wir hingegen die Folge $(a_n \in \mathbb{R}^2)_{n\in\mathbb{N}} := (x_0 + \frac{1}{n}, y_0 + \frac{2}{n})$. Dann ist $a_n \to (x_0, y_0)$ aber

$$\begin{aligned}f(x_0 + \frac{1}{n}, y_0 + \frac{2}{n}) &= \frac{(x_0 + \frac{1}{n})^2}{(x_0 + \frac{1}{n}) - (y_0 + \frac{2}{n})} = \frac{x_0^2 + \frac{2}{n}\cdot x_0 + (\frac{1}{n^2})}{x_0 - y_0 - \frac{1}{n}} \\ &= -n \cdot (x_0^2 + \frac{2}{n} \cdot x_0 + \frac{1}{n^2}) = -n x_0^2 - 2x_0 - \frac{1}{n} \to -\infty \neq 0 = f(x_0, y_0).\end{aligned}$$

Für $(x_0, y_0) = (0,0)$ betrachten wir die Folge $(b_n \in \mathbb{R}^2)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\right)$. Dann ist $b_n \to (0,0)$, aber

$$f(b_n) \;=\; \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^3}} \;=\; n \to \infty \neq 0 \;=\; f(0,0)$$

womit nach dem Folgenkriterium gezeigt ist, dass f in allen Punkten $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $x_0 = y_0$ unstetig ist.