Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Institut für Mathematik

Prof. Dr. H. Pabel
PD Dr. Oliver Roth, Dr. Daniela Kraus, Ralf Winkler

Würzburg, den 10. Januar 2006

8. Übung zur Analysis I

Wintersemester 2005/06
Lösungshinweise

30.) a.) Die vier Teilfolgen

$$b_k := a_{4k+1} = i + \left(\frac{1}{2}\right)^{4k+1} \quad (k \in \mathbb{N}_0) \quad , \quad c_k := a_{4k+2} = -1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{4k+2} \quad (k \in \mathbb{N}_0)$$
$$d_k := a_{4k+3} = -i + \left(\frac{1}{2}\right)^{4k+3} \quad (k \in \mathbb{N}_0) \quad , \quad e_k := a_{4k+4} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{4k+4} \quad (k \in \mathbb{N}_0)$$

sind konvergent mit Grenzwerten $\pm i, \pm 1$. Als Grenzwerte der Teilfolgen liegen in jeder Umgebung dieser Werte fast alle, insbesondere unendlich viele Folgenglieder der Teilfolge, also auch unendlich viele Folgenglieder von $(a_k \in \mathbb{C})_{k\in\mathbb{N}}$. Daher sind $\pm i, \pm 1$ Häufungspunkte der Folge $(a_k \in \mathbb{C})_{k\in\mathbb{N}}$. Angenommen, es gibt einen weiteren Häufungspunkt $z \notin \{\pm i, \pm 1\}$. Dann gibt es Zahlen $\epsilon, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4 > 0$ sowie disjunkte Umgebungen $U_\epsilon(z), U_{\epsilon_1}(i), U_{\epsilon_2}(-1), U_{\epsilon_3}(-i), U_{\epsilon_4}(1)$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass (b) gibt es zu z eine konvergente Teilfolge $(a_{k_l} \in \mathbb{C})_{l\in\mathbb{N}}$ von $(a_k \in \mathbb{C})_{k\in\mathbb{N}}$, d.h. alle Folgenglieder von $(a_{k_l} \in \mathbb{C})_{l\in\mathbb{N}}$ mit genügend großem Index $l_1 \in \mathbb{N}$ liegen in $U_\epsilon(z)$. Da aber jedes dieser Folgenglieder auch ein Folgenglied einer der konvergenten Folgen b_k, c_k, d_k oder e_k ist, liegen die Folgenglieder ab einem genügend großen $l_2 \in \mathbb{N}$ auch in einer der Umgebungen $U_{\epsilon_1}(i), U_{\epsilon_2}(-1), U_{\epsilon_3}(-i)$ oder $U_{\epsilon_4}(1)$ im Widerspruch zur Disjunktheit mit $U_\epsilon(z)$.

b.) Es sei $(a_k \in \mathbb{Q})_{k\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ eine Abzählung der rationalen Zahlen. In jeder Umgebung eines $x \in \mathbb{R}$ liegt nach einem Satz der Vorlesung eine rationale Zahl. Damit liegen (nach einem bereits mehrfach benutzten Beweisprinzip) in jeder Umgebung auch unendlich viele rationale Zahlen, also Folgenglieder von $(a_k \in \mathbb{Q})_{k\in\mathbb{N}}$. Somit ist $x \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt.

c.) Es seien $a := \limsup a_k$ und $b := \limsup b_k$. Ferner sei $\epsilon > 0$ beliebig gewählt. Nach Definition gilt $a_k \geq a + \frac{\epsilon}{2}$ und $b_k \geq b + \frac{\epsilon}{2}$ für höchstens endlich viele $k \in \mathbb{N}$, d.h es ist $a_k + b_k \geq a + b + \epsilon$ für höchstens endlich viele $k \in \mathbb{N}$. Wäre $c := \limsup(a_k + b_k) > a + b$, so würden, da c Häufungspunkt, in $(c - \delta, c + \delta)$ mit $\delta := \frac{c-(a+b)}{2}$ unendlich viele Folgenglieder liegen, insbesondere

$$a_k + b_k > c - \delta = a + b + \delta$$

für unendlich viele Folgenglieder $a_k + b_k$. Speziell für $\epsilon := \delta$ ist dies ein Widerspruch zu oben.