Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. H. Pabel
PD Dr. Oliver Roth, Dr. Daniela Kraus, Ralf Winkler

Würzburg, den 6. Dezember 2005

5. Übung zur Analysis I

Wintersemester 2005/06
Lösungshinweise

17.) a.)

$$(2+i)^3 = (2+i)(4+4i-1) = 8+8i-2+4i-4-i = 2+i\cdot 11\,,$$

und

$$\begin{aligned}\frac{(2+i)(3+2i)}{1-i} &= \frac{(2+i)(3+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1}{2}\,(2+i)(3+3i+2i-2)\\ &= \frac{1}{2}\,(2+i)(1+5i) = \frac{1}{2}\,(-3+11i) = -\frac{3}{2}+\frac{11}{2}i\,.\end{aligned}$$

b.) Für $z = a+ib$ und $w = c+id$ folgt

$$\begin{aligned}|z\cdot w|^2 &= |(ac-bd)+i\cdot(bc+ad)|^2 = (ac-bd)^2 + (bc+ad)^2\\ &= a^2c^2+b^2d^2-2abcd+b^2c^2+a^2d^2+2abcd = a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2\\ &= (a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2) = |z|^2\cdot|w|^2\,,\end{aligned}$$

woraus sich durch Wurzelziehen die erste Behauptung ergibt. Auch die anderen beiden Gesetze zeigt man durch bloßes Vergleichen.

c.) Es ist

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad |z-a|^2 < |1-\overline{a}z|^2\\ &\Leftrightarrow \quad (z-a)(\overline{z}-\overline{a}) < (1-\overline{a}z)\,(1-a\overline{z})\\ &\Leftrightarrow \quad |z|^2-\overline{a}z-a\overline{z}+|a|^2 < 1-a\overline{z}-\overline{a}z+|az|^2\\ &\Leftrightarrow \quad |z|^2+|a|^2 < 1+|a|^2\,|z|^2\\ &\Leftrightarrow \quad |z|^2\,(1-|a|^2) < (1-|a|^2)\\ &\overset{|a|<1}{\Leftrightarrow} \quad |z|^2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |z| < 1\,.\end{aligned}$$

18.) Angenommen, es ist $\leq$ eine mit den Operationen verträgliche, totale Ordnung auf $\mathbb{C}$. Wir benutzen die Tatsache, dass für $a \in \mathbb{C}$ und $a < 0$ die Ungleichung $-a > 0$ folgt (Andernfalls wäre wegen der Totalordnung $-a \leq 0$ und aus der Verträglichkeit mit $+$ würde folgen, dass $-a+a \leq 0+a$, also $a \geq 0$ im Widerspruch zu $a < 0$.)

Damit können wir zeigen, dass $a^2 > 0$ für alle $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Für $a > 0$ folgt dies aus der Verträglichkeit mit der Multiplikation, denn $0 < a \Rightarrow 0 = 0\cdot a \leq a^2$ und wegen $a \neq 0$ sogar $a^2 > 0$. Für $a < 0$ ist, wie eingangs gezeigt, $-a > 0$ und wir erhalten

$$a \leq 0, -a \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -a^2 = a\cdot(-a) \leq 0\cdot(-a) = 0$$

bzw., da $a \neq 0$, sogar $-a^2 < 0$, woraus aus obiger Überlegung $a^2 = -(-a^2) > 0$ folgt.

Somit folgt zum einen $-1 = i^2 > 0$ und nach Addition von 1 auf beiden Seiten: $1 \leq 0$. Zum anderen gilt $1 = 1^2 > 0$, insbesondere $1 \geq 0$. Zusammen folgt aus der Antisymmetrie der Ordnung also $1 = 0$. Widerspruch.

19.) a.) Für $x, y \in X$ ist mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y| \quad \Leftrightarrow \quad |x-y| \geq |x| - |y|$$

und ebenso

$$\begin{aligned} |y| &= |y-x+x| \leq |y-x| + |x| = |(-1)(x-y)| + |x| = |x-y| + |x| \\ \Leftrightarrow & \quad |x-y| \geq |y| - |x| = -(|x| - |y|) \end{aligned}$$

zusammen also $|x-y| \geq \big| |x| - |y| \big|$.

b.) Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ sind die Normaxiome wegen

$$|x|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n| \geq 0 \quad \text{und} \quad |x|_1 = 0 \Leftrightarrow \forall_{i=1,\ldots,n}\, x_i = 0 \Leftrightarrow x = 0\,,$$

$$|\lambda x|_1 = |\lambda x_1| + \ldots + |\lambda x_n| = |\lambda|\,|x_1| + \ldots + |\lambda|\,|x_n| = |\lambda| \cdot |x|_1$$

sowie

$$|x+y|_1 = |x_1+y_1| + \ldots + |x_n+y_n| \leq |x_1| + |y_1| + \ldots |x_n| + |y_n| = |x|_1 + |y|_1$$

erfüllt. Ferner ist

$$|x|_1 \leq 1 \Leftrightarrow |x_1| \leq 1 - |x_2| \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \leq 1 - x_2 & \Leftrightarrow \quad x_2 \leq 1 - x_1 \quad \text{falls } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 \leq 1 + x_2 & \Leftrightarrow \quad x_2 \geq x_1 - 1 \quad \text{falls } x_1 \geq 0, x_2 < 0 \\ -x_1 \leq 1 - x_2 & \Leftrightarrow \quad x_2 \leq 1 + x_1 \quad \text{falls } x_1 < 0, x_2 \geq 0 \\ -x_1 \leq 1 + x_2 & \Leftrightarrow \quad x_2 \geq -1 - x_1 \quad \text{falls } x_1 < 0, x_2 < 0\,. \end{cases}$$

20.) a.) Für $d(x,y) := |y-x|$ für alle $x, y \in X$, X normierter Raum, gilt

$$d(x,y) = |y-x| \geq 0 \wedge (d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |y-x| = 0 \Leftrightarrow y - x = 0 \Leftrightarrow y = x)\,,$$

$$d(x,y) = |y-x| = |(-1)(x-y)| = |x-y| = d(y,x)$$

sowie für $x, y, z \in X$

$$d(x,z) = |z-x| = |(z-y) + (y-x)| \leq |z-y| + |y-x| = d(y,z) + d(x,y)\,.$$

b.) Für $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned} d(x,y) = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |x-y| = 0 & \text{wenn } x = \lambda y \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R}\,, \\ |x| + |y| = 0 & \text{sonst}\,. \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y = 0 \Leftrightarrow x = y & \text{wenn } x = \lambda y \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R}\,, \\ x = 0 = y & \text{sonst}\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Symmetrie der Metrik ist im Falle $x = 0$ wegen $d(0,y) = |y| = d(y,0)$ erfüllt. Für $x \neq 0$ ist

$$\begin{aligned} d(y,x) &= \begin{cases} |x-y| & \text{wenn } x = \lambda y \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\,, \\ |x| + |y| & \text{sonst}\,. \end{cases} \\ &= \begin{cases} |y-x| & \text{wenn } y = \mu x \text{ für ein } \mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \quad (\mu = \lambda^{-1})\,, \\ |y| + |x| & \text{sonst}\,. \end{cases} \\ &= d(x,y)\,. \end{aligned}$$

Um die Dreiecksungleichung zu zeigen, betrachten wir zwei Fälle:

a.) Falls $x = \lambda z$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist

$$d(x,z) = |x-z| = |x-y+y-z| \le |x-y| + |y-z| \le d(x,y) + d(y,z)\,,$$

denn entweder ist $|x-y| = d(x,y)$ oder $|x-y| \le |x|+|y| = d(x,y)$ und analog für $|y-z|$.

b.) Falls $x \neq \lambda z$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist (Dreiecksungleichung)

$$d(x,z) = |x|+|z| \le \begin{cases} |x-y|+|y|+|z| = d(x,y)+d(y,z) & \text{falls } \exists_{\lambda_1\in\mathbb{R}}\, x=\lambda_1 y \quad \wedge \quad \nexists_{\lambda_2\in\mathbb{R}}\, y=\lambda_2 z \\ |x|+|z-y|+|y| = d(x,y)+d(y,z) & \text{falls } \nexists_{\lambda_1\in\mathbb{R}}\, x=\lambda_1 y \quad \wedge \quad \exists_{\lambda_2\in\mathbb{R}}\, y=\lambda_2 z \\ |x|+|y|+|y|+|z| = d(x,y)+d(y,z) & \text{falls } \nexists_{\lambda_1\in\mathbb{R}}\, x=\lambda_1 y \quad \wedge \quad \nexists_{\lambda_2\in\mathbb{R}}\, y=\lambda_2 z \end{cases}$$

Der Fall $\exists_{\lambda_1\in\mathbb{R}}\ x = \lambda_1 y \quad \wedge \quad \exists_{\lambda_2\in\mathbb{R}}\ y = \lambda_2 z$ kann nicht auftreten, denn dann wäre $x = \lambda_1\lambda_2 z$, was unter a.) fallen würde.